# 2018학년도 9월 고2 전국연합학력평가

# 정답 및 해설

## 수학 영역

### 나형 정답

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ② | 2 | ③ | 3 | ③ | 4 | ① | 5 | ⑤ |
| 6 | ① | 7 | ① | 8 | ④ | 9 | ⑤ | 10 | ④ |
| 11 | ① | 12 | ② | 13 | ④ | 14 | ③ | 15 | ③ |
| 16 | ④ | 17 | ⑤ | 18 | ② | 19 | ⑤ | 20 | ② |
| 21 | ① | 22 | 5 | 23 | 16 | 24 | 4 | 25 | 32 |
| 26 | 28 | 27 | 12 | 28 | 747 | 29 | 512 | 30 | 40 |

### 해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$3\times 9^{\frac{1}{2}}=3\times(3^2)^{\frac{1}{2}}=3\times 3=9$

2. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$A^C=\{1,\ 9\}$ 이므로

$A^C$ 의 모든 원소의 합은 $1+9=10$

3. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+2)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(x+2)=6$

4. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_7 49+\log_7\dfrac{1}{7}=\log_7\left(49\times\dfrac{1}{7}\right)=\log_7 7=1$

5. [출제의도] 합성함수 이해하기

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=5$

6. [출제의도] 절대부등식 이해하기

$x>0$, $\dfrac{9}{x}>0$ 이므로 $x+\dfrac{9}{x}\ge 2\sqrt{x\times\dfrac{9}{x}}=6$

(단, 등호는 $x=3$ 일 때 성립한다.)

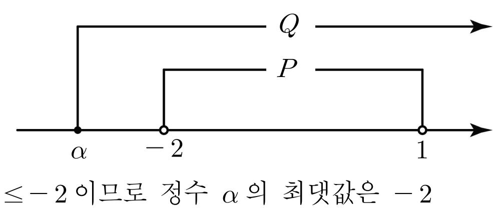
따라서 $x+\dfrac{9}{x}$ 의 최솟값은 6

7. [출제의도] 충분조건을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면

$P=\{x\,|\,(x+2)(x-1)<0\}$, $Q=\{x\,|\,x\ge\alpha\}$

$p$는 $q$이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$




$\alpha\le -2$ 이므로 정수 $\alpha$ 의 최댓값은 $-2$

8. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=3$ 이므로

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)+\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=1+3=4$

9. [출제의도] 수열의 극한값 계산하기

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+a\times 5^{n+1}}{5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+5a\right\}=5a$

$5a=3$ 이므로 $a=\dfrac{3}{5}$

10. [출제의도] 연속함수의 정의 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$ 에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(2x^2+ax+1)=a+3$,

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(-3x+b)=-3+b$,

$f(1)=7$ 이므로 $a+3=-3+b=7$

$a=4$, $b=10$

따라서 $a+b=4+10=14$

11. [출제의도] 미분계수 이해하기

함수 $f(x)=x^2+4x-2$ 에서 $f(1)=3$ 이고

$f'(x)=2x+4$ 이므로 $f'(1)=6$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2=2f'(1)=2\times 6=12$$

12. [출제의도] 유리함수의 성질 이해하기

함수 $y=\dfrac{ax+1}{bx+1}$ 의 그래프가

점 $(2,\ 3)$을 지나므로 $\dfrac{2a+1}{2b+1}=3$ … ㉠

함수 $y=\dfrac{ax+1}{bx+1}$ 의 그래프의 한 점근선이

직선 $y=2$ 이므로

$$y=\frac{ax+1}{bx+1}=\frac{a\left(x+\frac{1}{b}\right)-\frac{a}{b}+1}{b\left(x+\frac{1}{b}\right)}=\frac{-\frac{a}{b}+1}{b\left(x+\frac{1}{b}\right)}+\frac{a}{b}$$

에서 $\dfrac{a}{b}=2$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=3b+1$, $a=2b$

따라서 $a=-2$, $b=-1$ 이므로 $a^2+b^2=5$

13. [출제의도] 급수와 일반항 사이의 관계 이해하기

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2a_n-5b_n)$ 이 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n-5b_n)=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=5$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n(a_n+2b_n)=2\times(5+4)=18$

14. [출제의도] 등비수열의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$x$에 대한 다항식 $x^3-ax+b$를 $x-1$로 나눈

나머지가 57 이므로

나머지 정리에 의하여

$1-a+b=57$

$b=a+56$ … ㉠

1, $a$, $b$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=b$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a^2=a+56$

$a^2-a-56=(a+7)(a-8)=0$

$a=-7$ 또는 8

공비는 $a$이고 양수이므로 $a=8$, $b=a^2=64$

따라서 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{64}{8}=8$

15. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\log_a a^2b^3=\log_a a^2+\log_a b^3=2+3\log_a b=3$

이므로 $\log_a b=\dfrac{1}{3}$

따라서 $\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}=3$

16. [출제의도] 수열의 합을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

직선 $x=n$ 이

두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x+1}$ 과 만나는 점은

각각 $\mathrm{A}_n(n,\ \sqrt{n})$, $\mathrm{B}_n(n,\ -\sqrt{n+1})$

$T_n=\dfrac{1}{2}n(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{24}\frac{n}{T_n}=\sum_{n=1}^{24}\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2\sum_{n=1}^{24}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=2\times(5-1)=8$$

17. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$2^{\frac{4}{a}}=100$ 에서 $2^4=100^a$ 이므로 $2^4=10^{2a}$

$25^{\frac{2}{b}}=10$ 에서 $25^2=10^b$ 이므로 $5^4=10^b$

지수법칙에 의하여

$10^{2a+b}=10^{2a}\times 10^b=2^4\times 5^4=10^4$

따라서 $2a+b=4$

18. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 이용하여 추론하기

$$\begin{aligned}
&1\cdot 2n+3\cdot(2n-2)+5\cdot(2n-4)+\cdots+(2n-1)\cdot 2\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\boxed{2k-1}\right)\{2n-(2k-2)\}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\boxed{2k-1}\right)\{2(n+1)-2k\}\\
&=2(n+1)\sum_{k=1}^{n}\left(\boxed{2k-1}\right)-2\sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)\\
&=2(n+1)\{n(n+1)-n\}-2\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{\boxed{3}}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}\\
&=2(n+1)n^2-\frac{1}{3}n(n+1)\left(\boxed{4n-1}\right)\\
&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}
\end{aligned}$$

이다.

$f(k)=2k-1$, $a=3$, $g(n)=4n-1$

그러므로 $f(3)\times g(3)=5\times 11=55$

19. [출제의도] 함수의 미분가능성 이해하기

ㄱ. $f(1)=\dfrac{1}{2}\le 1$ 이므로 $g(1)=f(1)=\dfrac{1}{2}$

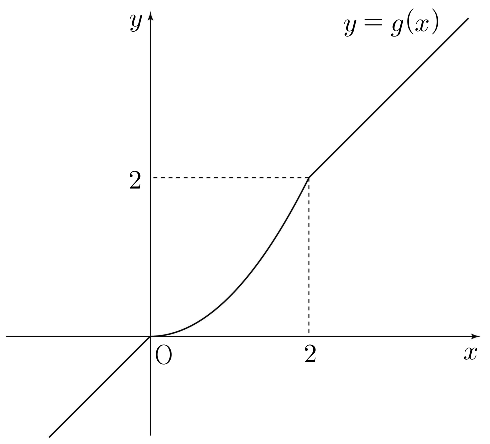
ㄴ. (i) $f(x)\le x$ 인 경우 $g(x)=f(x)\le x$

(ii) $f(x)>x$ 인 경우 $g(x)=x$

(i), (ii)에 의하여

모든 실수 $x$에 대하여 $g(x)\le x$

ㄷ. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.




함수 $g(x)$는 $x<0$, $0<x<2$, $x>2$에서 미분가능하므로 $x=0$, $x=2$에서의 미분가능성을 조사해보면

(i) $x=0$일 때,

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{h-0}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\frac{1}{2}h^2-0}{h}=0$$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ii) $x=2$일 때,

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\frac{1}{2}(2+h)^2-2}{h}=2$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(2+h)-2}{h}=1$$

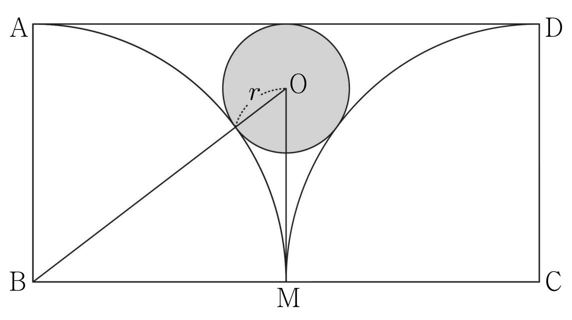
이므로 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

따라서 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

**20. [출제의도] 등비급수를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기**

다음은 그림 $R_1$이다.




두 부채꼴의 호 MA, 호 DM과 선분 AD에 모두 접하는 원의 중심을 O, 반지름의 길이를 $r$라 하자.

$\overline{BO}^2=\overline{BM}^2+\overline{OM}^2$이므로

$(1+r)^2=1^2+(1-r)^2$

$r=\frac{1}{4}$, $S_1=\left(\frac{1}{4}\right)^2\pi=\frac{\pi}{16}$

다음은 그림 $R_{n+1}$의 일부이다. $(n\geq 1)$

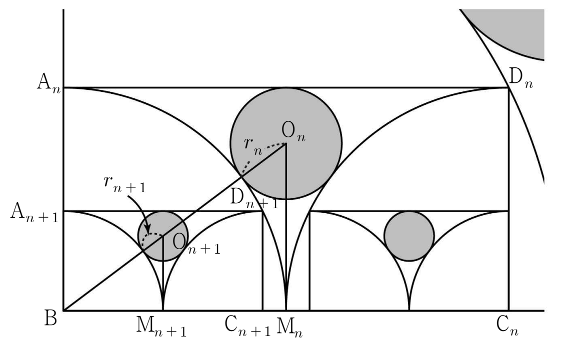



그림 $R_n$에서 새로 그려진 각 부채꼴에 내접하는 직사각형 중 한 꼭짓점을 B로 하는 직사각형을 $A_nBC_nD_n$이라 하고, 직사각형 $A_nBC_nD_n$ 내부의 두 부채꼴의 호와 선분 $A_nD_n$에 모두 접하는 원의 중심을 $O_n$, 반지름의 길이를 $r_n$, 선분 $BC_n$의 중점을 $M_n$이라 하자.

$\overline{A_{n+1}B}=l$이라 하면

$\overline{A_{n+1}B}:\overline{BC_{n+1}}=1:2$이므로

$\overline{BC_{n+1}}=2l$, $\overline{BD_{n+1}}=\sqrt{5}\,l$

또한, $\overline{BD_{n+1}}=\overline{BM_n}=\sqrt{5}\,l$이고

삼각형 $O_{n+1}BM_{n+1}$과 삼각형 $O_nBM_n$은 닮음이므로 $\overline{BM_{n+1}}:\overline{BM_n}=\overline{BO_{n+1}}:\overline{BO_n}$

$l:\sqrt{5}\,l=(l+r_{n+1}):(\sqrt{5}\,l+r_n)$

$r_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}r_n$

그림 $R_n$에서 새로 그려진 원 한 개의 넓이를 $a_n$이라 하면 $a_{n+1}=\frac{1}{5}a_n$

그림 $R_{n+1}$에서 새로 그려진 원의 개수는 그림 $R_n$에서 새로 그려진 원의 개수의 2배이므로

$S_n$은 첫째항이 $\frac{\pi}{16}$이고 공비가 $\frac{2}{5}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{\pi}{16}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{48}\pi$

**21. [출제의도] 수열의 합을 이용하여 추론하기**

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공차를 $d$라 하면

조건 (가)에 의하여

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n}=p\ (p\text{는 상수})$$

이고,

$$\frac{\frac{2n\{2a+(2n-1)d\}}{2}}{\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}}=p$$

$4a+4dn-2d=2ap+dnp-dp$

$(4d-dp)n+(4a-2d-2ap+dp)=0 \quad \cdots(\bigstar)$

$(\bigstar)$이 자연수 $n$에 대한 항등식이므로

$4d-dp=0$, $4a-2d-2ap+dp=0$

$d\neq 0$이므로 $p=4$, $d=2a$

$a_n=a+(n-1)\times 2a=a(2n-1)$

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{a}$$

$\frac{1}{a}=\frac{1}{10}$이므로 $a=10$, $d=20$

따라서 $a_n=20n-10$이므로 $a_{10}=190$

**22. [출제의도] 수열의 극한값 계산하기**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2-3n}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{10-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}=5$$

**23. [출제의도] 부분집합의 성질 이해하기**

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로 $n(A)=4$

따라서 집합 $A$의 모든 부분집합의 개수는

$2^4=16$

**24. [출제의도] 역함수 이해하기**

함수 $f(x)=3x-7$에서

$f^{-1}(5)=k$라 하면

역함수의 성질에 의하여

$f(k)=3k-7=5$이므로 $k=4$

따라서 $f^{-1}(5)=4$

**25. [출제의도] 등비수열 이해하기**

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$이라 하면

$a_3\times a_4=a_5$에서 $\frac{1}{2}r^2\times\frac{1}{2}r^3=\frac{1}{2}r^4$

$r=2$이므로 $a_7=\frac{1}{2}\times 2^6=32$

**26. [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기**

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=12$에서 극한값이 존재하고

$x\to 1$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$

$\lim_{x\to 1}\{f(x)-2\}=0$에서 $f(1)=2$이다.

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=12$

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$이므로

$g'(1)=2f(1)+2f'(1)$

$\quad=2\times 2+2\times 12=4+24=28$

**27. [출제의도] 거듭제곱근의 성질 이해하기**

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^n=2^{\frac{5n}{6}}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 $n$은 6의 배수이다.

$n=6$일 때, $2^5=32$

$n=12$일 때, $(2^5)^2=2^{10}=1024$

$n=18$일 때, $(2^5)^3=2^{15}=32768$

$\vdots$

$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^n=2^{\frac{5n}{6}}$이 네 자리 자연수가 되어야 하므로 $n=12$

**28. [출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 이용하여 추론하기**

수열 $\{a_n\}$은

$a_1=88\geq 65$

$a_n\geq 65$인 경우 $a_{n+1}=a_n-3$이므로

$a_n=-3n+91\geq 65$에서 $n\leq\frac{26}{3}=8.666\cdots$

$n\geq 9$일 때,

$$\begin{cases} a_9=a_8-3=67-3=64 \\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n \qquad (n\geq 9)\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{15}a_n=\sum_{n=1}^{8}a_n+\sum_{n=9}^{15}a_n$$

$$= \frac{8\times(a_1+a_8)}{2} + \frac{a_9\times\left(1-\frac{1}{2^7}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{8\times(88+67)}{2} + \frac{64\times\left(1-\frac{1}{2^7}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 620+127 = 747$$

**29. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기**

점 C 는 선분 AB 의 중점이므로 $\mathrm{C}\left(\frac{3}{2}t,\ \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$

직선 AB 의 기울기가 $-\sqrt{2}$ 이므로 점 C 를 지나고 직선 AB 에 수직인 직선을 $l$ 이라 하면 직선 $l$ 의 방정식은

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{3}{2}t\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}t$$

점 D 는 직선 $l$ 과 직선 $x=2t$ 의 교점이므로

점 D 의 좌표는 $\mathrm{D}\left(2t,\ \frac{3\sqrt{2}}{4}t\right)$

$$f(t) = \overline{\mathrm{CD}} = \sqrt{\left(2t-\frac{3}{2}t\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}t-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4}t$$

$$\lim_{t\to4}\frac{t^2-16}{f(t)-\sqrt{6}} = \lim_{t\to4}\frac{t^2-4^2}{\frac{\sqrt{6}}{4}t-\sqrt{6}}$$

$$= \lim_{t\to4}\frac{4(t-4)(t+4)}{\sqrt{6}\,(t-4)}$$

$$= \lim_{t\to4}\frac{4(t+4)}{\sqrt{6}}$$

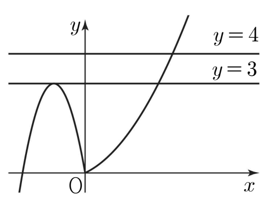
$$= \frac{16\sqrt{6}}{3}$$

$k=\frac{16\sqrt{6}}{3}$ 이므로 $3k^2=512$

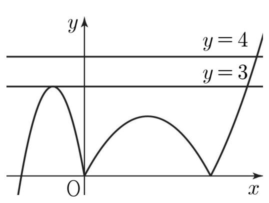
**30. [출제의도] 함수의 연속성을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기**

함수 $f(x)$ 는 곡선 $y=ax^2+bx$ 에 따라 다음과 같이 6 가지의 그래프의 개형을 갖는다.

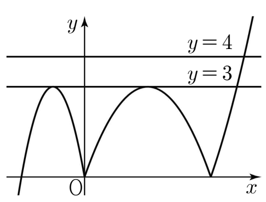
①



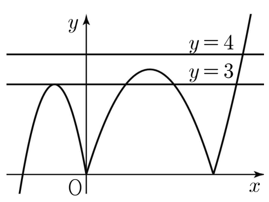

②



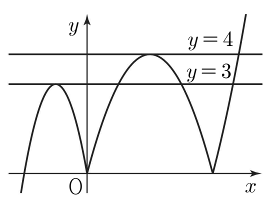

③



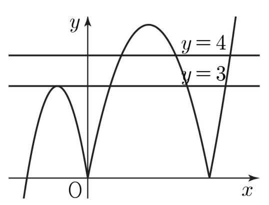

④




⑤




⑥




조건 (가)를 만족시키는 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 ⑤가 유일하다.

(i) 곡선 $y=ax^2+bx$ 의 꼭짓점의 $y$ 좌표는 $-4$ 이므로

$$y=ax^2+bx = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a} \text{ 에서}$$

$$-\frac{b^2}{4a} = -4 \qquad \cdots ㉠$$

(ii) 조건 (나)에 의하여

곡선 $y=ax^2+bx$ 는 점 $\left(\frac{2}{3},\ -3\right)$을 지나고,

꼭짓점의 $x$ 좌표 $-\frac{b}{2a}$ 는 $\frac{2}{3}$ 보다 크다.

$$4a+6b=-27 \qquad \cdots ㉡$$

$$-\frac{b}{2a} > \frac{2}{3} \qquad \cdots ㉢$$

㉠, ㉡에 의하여

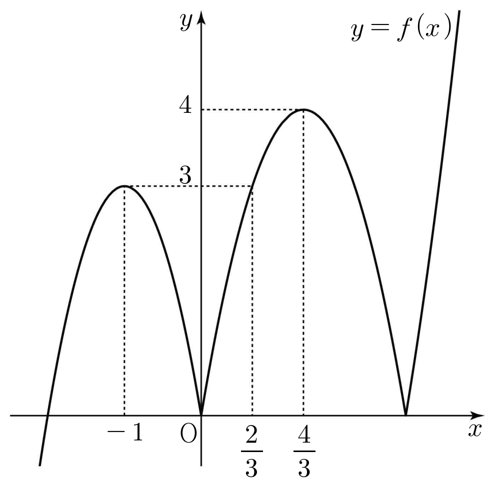
$$b^2+24b+108=(b+6)(b+18)=0$$

$$\begin{cases} a=\frac{9}{4} \\ b=-6 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} a=\frac{81}{4} \\ b=-18 \end{cases}$$

㉢에 의하여 $a=\frac{9}{4}$, $b=-6$이고 $-\frac{b}{2a}=\frac{4}{3}$

따라서

$$f(x) = \begin{cases} -3x(x+2) & (x<0) \\ \left|\frac{9}{4}x^2-6x\right| & (x\geq 0) \end{cases}$$




$f(x)=4$ 인 $x_1$ 은 $\frac{4}{3}$ 이므로 $g(4)=\frac{4}{3}$

$$30\times g(4) = 30\times\frac{4}{3} = 40$$