[문제] $a \neq 0$일 때, $f_a : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ 가 조건 $f_a{}'(0) = \dfrac{a}{\cos t}$, $f_a(0) = 0$ 을 만족시키는 함수라 하자. X가 반지름이 $r > 0$ 인 구면의 지리적 조각일 때, 구면위의 곡선 $\lambda_a(t) = X(f_a(t), t)$를 록소드롬이라고 한다. $\lambda_a{}'(t)$는 북쪽을 향하는 벡터 X_v와 항상 일정한 각을 유지함을 보여라.

(해)

(Claim) 일반적으로 내적노음공간에서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{v}, \vec{w}$ 사이의 각 $\measuredangle(\vec{v}, \vec{w})$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\measuredangle(\vec{v}, \vec{w}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\| \vec{v} \| \ \| \vec{w} \|}\right)$$

따라서 원하는 증명을 하기 위해선 $\dfrac{\lambda_a{}'(t) \bullet X_v}{\| \lambda_a{}'(t) \| \ \| X_v \|}$ 이 고정된 상수임을 보이면 된다.

지리적 조각 X는 $X(u, v) = (r\cos v \cos u\, ,\, r\cos v \sin u\, ,\, r\sin v)$으로 주어지는데 X_u 와 X_v 는 각각 다음과 같이 구해진다.

$$X_u = r(-\cos v \sin u\, ,\, \cos v \cos u\, ,\, 0) \quad , \quad X_v = r(-\sin v \cos u\, ,\, -\sin v \sin u\, ,\, \cos v)$$

이때 X_v는 항상 북쪽을 향하고, $X_u \perp X_v$ 즉, $X_u \bullet X_v = 0$ 이다. 또한 간단한 계산에 의해 다음을 얻는다.

$$X_u \bullet X_u = r^2 \cos^2 v \ , \quad X_v \bullet X_v = r^2$$

한편 연쇄법칙에 의해

$$\begin{aligned}
\lambda_a{}'(t) &= \left(X(f_a(t), t)\right)' \\
&= f_a{}'(t)\, X_u + X_v \qquad \left(\begin{cases} u = f_a{}'(t) \\ v = t \end{cases} \right) \\
&= \frac{a}{\cos t} X_u + X_v
\end{aligned}$$

이고, 이로써 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_a{}'(t) \bullet X_v}{\| \lambda_a{}'(t) \| \ \| X_v \|} &= \frac{\left(\frac{a}{\cos t} X_u + X_v\right) \bullet X_v}{\| \lambda_a{}'(t) \| \ \| X_v \|} \\
&= \frac{X_v \bullet X_v}{\| \lambda_a{}'(t) \| \ \| X_v \|} = \frac{r}{\| \lambda_a{}'(t) \|} \\
&= \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{a}{\cos t} X_u + X_v\right) \bullet \left(\frac{a}{\cos t} X_u + X_v\right)}} \\
&= \frac{r}{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} X_u \bullet X_u + X_v \bullet X_v}} \\
&= \frac{r}{\sqrt{a^2 r^2 + r^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}
\end{aligned}$$

따라서 임의의 $t \in (-\pi/2\, ,\, \pi/2)$에 대하여 $\measuredangle(\lambda_a{}'(t), X_v) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right) \equiv \text{Const}$ 이다. (끝)